LÍMITE Y SUS PROPIEDADES

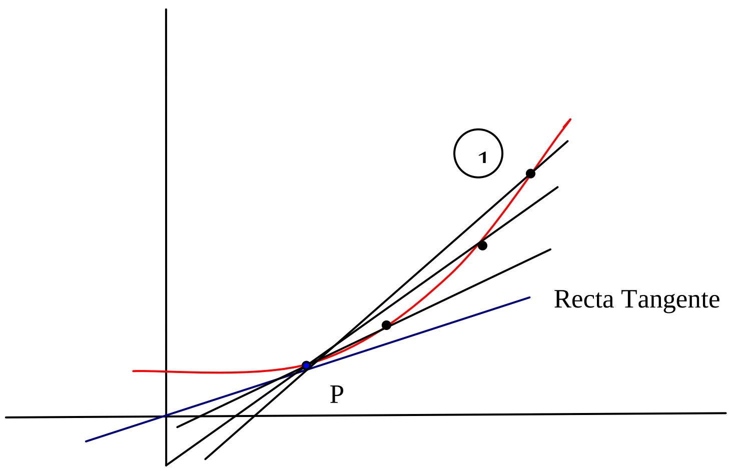
INTRODUCCION A LOS LÍMITES

La noción de límite es fundamental para la comprensión del cálculo.
Mediante varios ejemplos se busca que los estudiantes tengan claridad del significado de límite.

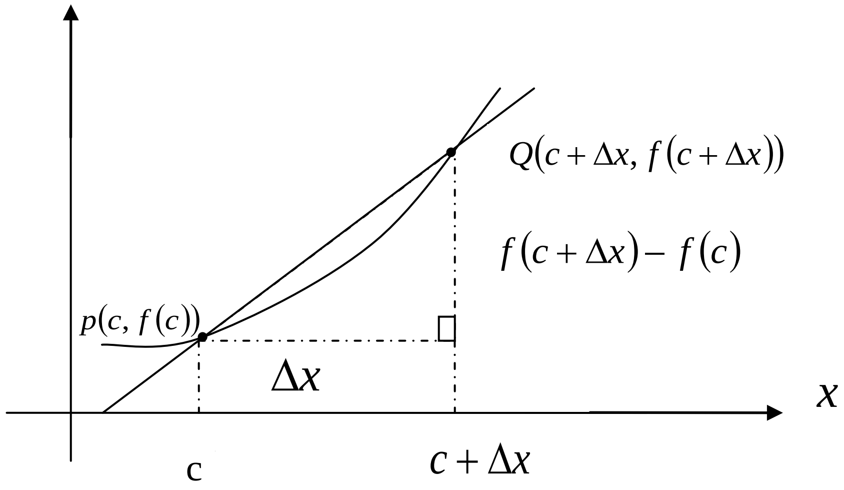
1. El problema de la recta tangente.

Analizaremos el problema clásico del cálculo denominado el problema de la recta tangente que consiste que dada una función $f(x)$ y un punto p de su gráfica se pide calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto P. En efecto, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto p, es equivalente a determinar su pendiente de la recta en el punto p.

Ahora bien, suponemos que un punto Q, moviéndose sobre la curva de $f(x)$, formando rectas secantes a medida que acerca a P.



Cuando la pendiente de la secante se va aproximando A P, la figura, de la posición limite

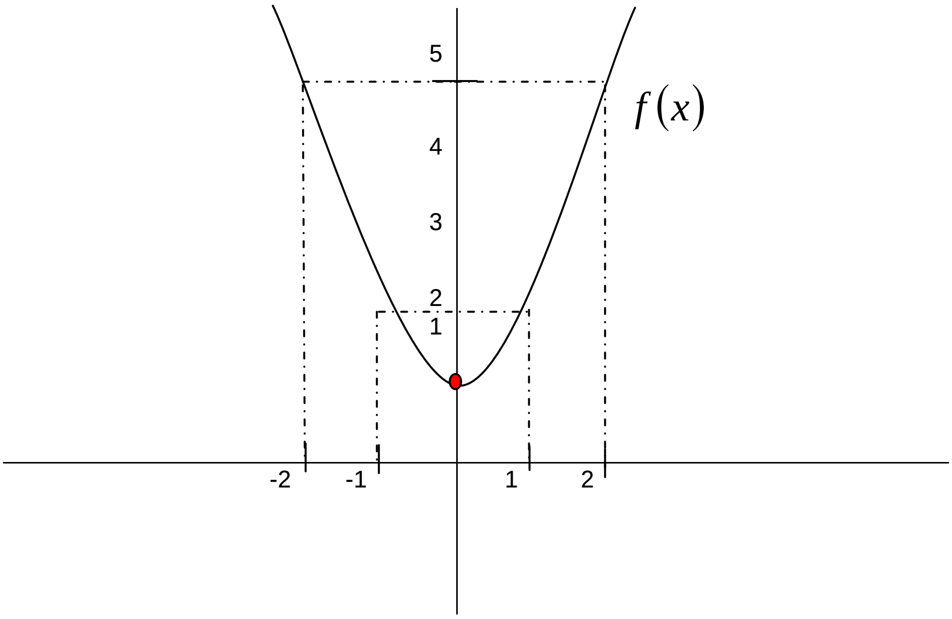


La pendiente de la recta secante es:

$$M_{\sec} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{c+\Delta} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

2. Sea $f(x)=x^2+1$, con dominio los $\Re$

Su gráfica es:



Observemos el comportamiento de la función f(X) para valores cercanos a 1, pero no iguales a 1.

Elaboremos dos tablas.

T	$f(x)=x^2$
0.7	1.49
0.8	1.64
0.9	1.81
0.99	1.9801
0.999	1.998001
0.999	1.99980001

x	$f(x)=x^2$
1.5	2.69
1.2	2.44
1.1	1.21
1.01	2.0201
1.001	2.002001
1.0001	2.00020001

Al analizar las dos tablas, podemos darnos cuenta que cuando X tiende a 1, que se simboliza x$\rightarrow$1, entonces, f(X) $\rightarrow$2, utilizando la idea límite podemos escribir.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

3. Esbozar la gráfica de la función dada por

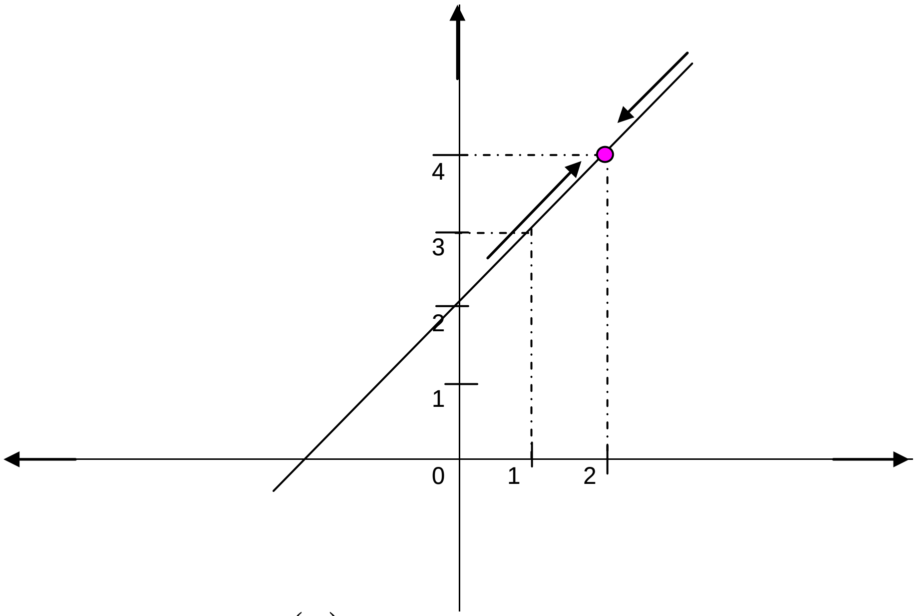
$$f(x) = x^2 - 4/x - 2, \quad x \neq 2$$

Para observar el comportamiento de la gráfica para valores de x cercanos a 2, condensado en la siguiente tabla de datos.

$f(x)$ *tiende a* 4 $\rightarrow$ $\leftarrow$ $f(x)$ *tiende a* 4

x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$	3.8	3.9	3.99	3.999	?	4.001	4.01	4.1	4.2

Al realizar la gráfica de f (x) es una línea recta con una discontinuidad (hueco) en el punto p (2,4)



Es decir, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

DEFINICIÓN INFORMAL DE LÍMITE

Si $f(x)$ está definida para valores próximos a C, encontramos que los valores de $f(x)$ se acercan a un valor único L, entonces, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales, n un entero positivo, f y g son funciones que tienen límites cuando $x \to c$, sin validas las siguientes propiedades

1. Límite de una constante

Sea $f(x) = k$, entonces, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = k$

2. Límite de una suma de funciones

$$\lim_{x \to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

3. Límite de una diferencia de funciones

$$\lim_{x \to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

4. Límite de un producto de funciones

$$\lim_{x \to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

5. Límite de un cociente de funciones

$$\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)},\ g(x) \neq 0$$

OBSERVACIONES

1. Para determinar $\lim f(x)$, no nos interesa lo que ocurre en $x = c$, sino lo que ocurre a la derecha y a la izquierda de c. Incluso puede que $f(c)$ no existe.

2. El límite de una función es único. Esto significa $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(x)$

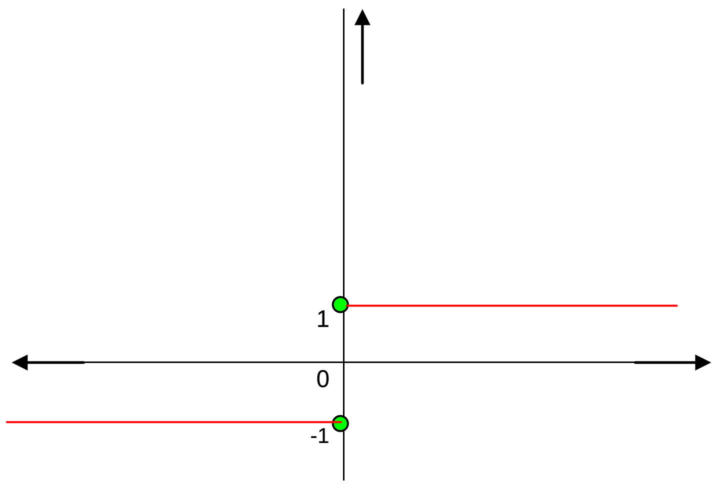
LIMITES QUE NO EXISTEN

Analicemos el comportamiento del límite de $F(x) = \frac{|x|}{x}$

$$\underset{x \to 0}{Lím} \frac{|x|}{x}$$

Veamos

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$



$$\underset{x \to 0^{1}}{Lím} f(x) = 1 \text{ y, } \underset{x \to 0^{-1}}{Lím} f(x) = -1$$

Como el límite a la derecha y el límite a la izquierda de $f(x)$ no son iguales, esto significa que $f(x)$ no existe.

3. Límite de una potencia

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

4. Límite de una raíz

a) Si L ≥ 0, $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

b) Si L ≤ 0, si n es par, $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)}$ no existe

Si n es impar, $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

TECNICAS PARA CALCULAR LÍMITES

Cuando se esta calculando el límite de una función racional cuyo denominador es cero, se trata de eliminar esta determinación utilizando 3 métodos que son:

1. Factorización
2. |Racionalización
3. La derivación (regla H' opital)

EJEMPLOS: CALCULAR EL LIMITE (SI EXISTE)

1. $\text{Lím.}_{X\to 0} \frac{7x+x^2}{x} = \text{Lím}_{x\to 0} \frac{x(7+x)}{x} = (7+x)_{x\to 0} = 7+0=7$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{1+3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

3. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2}$$

$$= \frac{2+3}{2+2}$$

$$= \frac{5}{4}$$

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3}$$

$$= \frac{1-2}{1-3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{t\to a} \frac{t^4 - a^4}{t^2 - a^2} = \text{Lím}_{t\to a} \frac{(t^2 + a^2)(t^2 - a^2)}{(t^2 - a^2)}$$

$$= \lim_{t\to a} (t^2 + a^2)$$

$$= a^2 + a^2$$

$$= 2a^2$$

6. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2} = \text{Lím}_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$$ (No existe)

7. $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \text{Lím}_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)}{(x-2)} \left(\frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x + 2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x+1} = \text{Lím}\limits_{x\to -1} \dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2}\right)}{(x+1)}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+3-2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \text{Lím}\limits_{x\to 4} \dfrac{(x+4)(x-4)}{(x-4)}$

$$= \lim_{x\to 4}(x+4)$$
$$= 4+4$$
$$= 8$$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2}\right] = \text{Lím}\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{2-(x+2)}{2(x+2)}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{2(x+2)}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}$$

11. $\lim\limits_{m\to 4} \left[\dfrac{3m^2-8m-16}{2m^2-9m+4}\right]$

FACTORICEMOS TANTO EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR

$$3m^2-8m-16=\frac{3^2m^2-8(3)m-48}{3}=\frac{(3m-12)(3m+4)}{3}$$

$$=(3-4)(3m+4)$$

$$2m^2-9m-4=\frac{2^2m^2-9m-8}{2}=\frac{(2m-8)(2m-1)}{2}$$

$$=(3-4)(2m-1)$$

VOLVIENDO AL LÍMITE INICIAL

$$\underset{m\to 4}{Lim}\frac{(m-4)(3m+4)}{(m-4)(2m-1)}=\underset{m\to 4}{Lim}\frac{3m+4}{2m-1}$$

$$=\frac{12+4}{8-1}$$

$$=\frac{8}{7}$$

12. $\underset{x\to 2}{Lim}\ \dfrac{x^3-8}{x-2}=\underset{x\to 2}{Lim}\ \dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)}$

$$=\underset{x-2}{Lim}\left(x^2+2x+4\right)$$

$$= 4 + 4 + 4$$
$$= 12$$

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(1)} + \sqrt[3]{(1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(1)} + \sqrt[3]{(1)^2}} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - 1 - 1}{x \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)}$$

$$= \frac{1}{1+1+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

14. $= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{xh(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-1}{x(x+h)} \right]$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

15.

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a} \left(\frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{(x+a)(x-a)} \right) \left(\frac{\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}} \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x-b-(a-b)}{(x+a)(x-a)\left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x-b-a+b}{(x+a)(x-a)\left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)\left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{(x+a)\ \left(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b}\right)}$$

$$= \frac{1}{2a\left(2\sqrt{a-b}\right)} = \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$$

LIMITES ESPECIALES

Existen cuatro Límites Especiales de gran utilidad para el estudio de la Derivada.

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n + a^n}{x - a}$

Si aplicamos las propiedades de los límites, a la función dada, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}\right)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1}\right)$$

$$= a^{n-1}+aa^{n-2}+\ldots+a^{n-1}$$

$$= x^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-11}$$

$$= na^{n-1}$$

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to a}\frac{x^{5-}a^5}{x-a} = 5a^4$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5}{x-2}\ 5(2)^4 = 80$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^{112}-3^{112}}{x-3}$$

$$= \frac{1(3)^{-112}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$